1. Dla jednowymiarowego oscylatora anharmonicznego z hamiltonianem
$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}x^4$
($m = 1$, stosujemy jednostki atomowe) zamierzamy ocenić wartości liczbowe trzech najniżej położonych poziomów energetycznych (E_0, E_1 oraz E_2) przy pomocy rachunku zaburzeń pierwszego rzędu. W tym celu obliczono całki z funkcjami $\psi_0^{(0)}$, $\psi_1^{(0)}$ oraz $\psi_2^{(0)}$ oscylatora harmonicznego (niezaburzonego) otrzymując :
$< \psi_0^{(0)}|\hat{x^4}\psi_0^{(0)} >= \frac{3}{4}$, $< \psi_1^{(0)}|\hat{x^4}\psi_1^{(0)} >= \frac{15}{4}$, $< \psi_2^{(0)}|\hat{x^4}\psi_2^{(0)} >= \frac{39}{4}$
$< \psi_0^{(0)}|\hat{x^4}\psi_1^{(0)} >= 0$, $< \psi_0^{(0)}|\hat{x^4}\psi_2^{(0)} >= \frac{3}{\sqrt{2}}$, $< \psi_1^{(0)}|\hat{x^4}\psi_2^{(0)} >= 0$
Który z podanych zestawów energii przedstawia sumę energii oscylatora harmonicznego i poprawki pierwszego rzędu według rachunku zaburzeń :
a) $E_0^{(0)} + E_0^{((1)} = 0.575$, $E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = 1.875$, $E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 3.475$
b) $E_0^{(0)} + E_0^{((1)} = 0.425$, $E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = 1.125$, $E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 1.525$
c) $E_0^{(0)} + E_0^{((1)} = 0.575$, $E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = 1.125$, $E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 3.475$
d) $E_0^{(0)} + E_0^{((1)} = 0.575$, $E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = 1.875$, $E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 1.525$

2. Dla oscylatora anharmonicznego opisanego w pkt. 1 możemy ocenić energię E_0 i funkcję ψ_0 stanu podstawowego przy pomocy metody Ritza stosując różne funkcje próbne $\phi_m, m = r, s, t, u, v$:
$\phi_r = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}(\psi_0^{(0)} + p\psi_1^{(0)}),\ p \in \boldsymbol{R}$; $\phi_s = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}(\psi_0^{(0)} + p\psi_2^{(0)}),\ p \in \boldsymbol{R}$
$\phi_t = \psi_0^{(0)}$; $\phi_u = \psi_1^{(0)}$; $\phi_v = \psi_2^{(0)}$
gdzie $\psi_k^{(0)}, k = 0, 1, 2$ są funkcjami własnymi oscylatora harmonicznego. Dla każdej z funkcji próbnych $\phi_m, m = r, s, t, u, v$ obliczamy wartość średnią hamiltonianu $\hat{H}$ i oznaczamy odpowiednio $\epsilon_m, m = r, s, t, u, v$ (z funkcjami ϕ_r oraz ϕ_s obliczamy takie p, aby uzyskać $min\ \ \epsilon_r(p)$ oraz $min\ \ \epsilon_s(p)$. Czy prawdziwe są relacje :
a) $\epsilon_s < E_0$ b) $\epsilon_r = \epsilon_t$ c) $\epsilon_t > \epsilon_u$ d) $\epsilon_u > \epsilon_v$

3. Wykorzystując metodę Ritza do oceny energii stanu podstawowego oscylatora anharmonicznego (poprzedni pkt.2) z funkcją ϕ_s należy otrzymać wartości własne macierzy $\boldsymbol{H} = (h_{ij}), h_{ij} =< \psi_i^{(0)}|\hat{H}\psi_j^{(0)} >$, $i, j = 0, 2$:
a)$\begin{pmatrix} \frac{2.3}{4} & \frac{0.3}{\sqrt{2}} \\ \frac{0.3}{\sqrt{2}} & \frac{13.9}{4} \end{pmatrix}$ b)$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$ c)$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ d)$\begin{pmatrix} \frac{1.5}{4} & \frac{0.3}{\sqrt{2}} \\ \frac{0.3}{\sqrt{2}} & \frac{3.9}{4} \end{pmatrix}$

4. Załóżmy, że dla oceny funkcji falowej (i energii) stanu podstawowego atomu wodoru wykorzystujemy następującą funkcję próbną : $\phi(r, \alpha) = (\frac{2\alpha}{\pi})^{\frac{3}{4}} e^{-\alpha r^2}$.
Załóżmy ponadto, że hamiltonian atomu wodoru, w jednostkach atomowych, ma postać : $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r}$
Gdy obliczymy wartość średnią operatorów $\hat{T}$ oraz $\hat{V}$ z funkcją $\phi(r, \alpha)$, otrzymamy :
$< \hat{T} >= \frac{3}{2}\alpha$, $< \hat{V} >= -\sqrt{\frac{8\alpha}{\pi}}$
Wykorzystując następnie metodę wariacyjną otrzymamy energię ϵ_1, która przybliża wartość energii E_1 stanu podstawowego atomu wodoru (w jednostkach atomowych) :
a) $\epsilon_1 = \frac{8}{9\pi}$, b) $\epsilon_1 = -\frac{8}{9\pi}$, c) $\epsilon_1 = -\frac{4}{3\pi}$, d) $\epsilon_1 = -\frac{3\pi}{4}$

5. Załóżmy, że podział hamiltonianu $\hat{H}$ na część niezaburzoną $\hat{H}_0$ oraz zaburzenie $\hat{H}'$ jest następujący: $\hat{H} = \hat{H}_0 + H'$, przy czym znamy wszystkie funkcje własne $\psi_n^{(0)}$i wartości własne $E_n^{(0)}$ hamiltonianu $\hat{H}_0$. Energie i funkcje własne hamiltonianu $\hat{H}$ wyrażamy w postaci (po ustaleniu wartości parametru zaburzenia $\lambda = 1$) :
$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} + ...$
$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)} + \psi_n^{(3)} + ...$
Jakie jest prawidłowe wyrażenie na $E_n^{(1)}$:
a) $E_n^{(1)} =< \psi_n^{(0)}|\hat{H}'\psi_n^{(0)} >$ b) $E_n^{(1)} =< \psi_n^{(1)}|\hat{H}'\psi_n^{(0)} >$
c) $E_n^{(1)} =< \psi_n^{(0)}|\hat{H}'\psi_n^{(1)} >$ d) $E_n^{(1)} =< \psi_n^{(1)}|\hat{H}'\psi_n^{(1)} >$

6. Jakie jest prawidłowe wyrażenie na $E_n^{(2)}$ (symbole wg pkt. 5) :
a) $E_n^{(2)} =< \psi_n^{(0)}|\hat{H}'\psi_n^{(1)} >$ b) $E_n^{(2)} =< \psi_n^{(1)}|\hat{H}'\psi_n^{(2)} >$
c) $E_n^{(2)} =< \psi_n^{(2)}|\hat{H}'\psi_n^{(1)} >$ d) $E_n^{(2)} =< \psi_n^{(2)}|\hat{H}'\psi_n^{(0)} >$

7. Jakie jest prawidłowe wyrażenie na $E_n^{(3)}$ (symbole wg pkt. 5) :
a) $E_n^{(3)} =< \psi_n^{(1)}|\hat{H}'\psi_n^{(1)} > -E_n^{(1)} < \psi_n^{(1)}|\psi_n^{(1)} >$
b) $E_n^{(3)} =< \psi_n^{(2)}|\hat{H}'\psi_n^{(2)} > -E_n^{(2)} < \psi_n^{(1)}|\psi_n^{(1)} >$
c) $E_n^{(3)} =< \psi_n^{(0)}|\hat{H}'\psi_n^{(3)} > -E_n^{(1)} < \psi_n^{(2)}|\psi_n^{(2)} >$
d) $E_n^{(3)} =< \psi_n^{(3)}|\hat{H}'\psi_n^{(0)} > -E_n^{(1)} < \psi_n^{(2)}|\psi_n^{(1)} >$

8. Dla cząstki w jednowymiarowym pudle potencjału (tylko na odcinku $0 < x < \pi$) wybieramy funkcję próbną $\phi(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi^3}}x$. Obliczamy wartość średnią hamiltonianu $\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ z funkcją $\phi(x)$ i zauważamy, że wartość ta jest równa zero, czyli mniej, niż energia stanu podstawowego, która jest dodatnia.
Czy prawdziwe jest objaśnienie tego ciekawego fenomenu :
a) istnieją wyjątki od zasady wariacyjnej i tu mamy przykład
b) funkcja próbna powinna znikać na krańcach przedziału, tj. $\phi(0) = 0$ oraz $\phi(\pi) = 0$, czyli wybrano niewłaściwą funkcję próbną
c) funkcja próbna nie musi znikać na krańcach przedziału, ale powinna być całkowalna z kwadratem na odcinku $(0, \pi)$, co jednak może w niektórych przypadkach doprowadzić do zerowania się wartości średniej hamiltonianu
d) wybrano niewłaściwą funkcję próbną, gdyż nie jest ona dwukrotnie różniczkowalna, a więc nieprawidłowo obliczono wartość średnią hamiltonianu.