Matematyka A - ćwiczenia

Praca domowa 3.
Granice i pochodne funkcji, styczne.
19.11.2018

We wszystkich poniższych zadaniach można powoływać się na granice obliczone wcześniej na wykładzie lub na ćwiczeniach. Pracę domową proszę oddać do poniedziałku 2.12, włącznie.

1. Proszę obliczyć granice następujących funkcji (prawo- i lewostronne jeśli są one różne):

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-15}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(3x)}{\mathrm{tg}(2x)}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\sin(\pi x/2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^{\frac{1}{x}}+7}{5^{\frac{1}{x}}+1}.$$

2. Proszę zbadać ciągłość następujących funkcji i pokazać dla jakich wartości parametrów a, b są one ciągłe w całej swojej dziedzinie:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < -1 \\ \log_a(x+2) & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < -2 \\ |x^2+x| & \text{dla } |x| \leqslant 2 \\ a\log_2(x) - bx & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

3. Proszę obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$\mathrm{tg}\,[\ln(4x)], \quad \ln\,[\mathrm{tg}(4x)], \quad \sqrt{e^{\sin(x)}+4}, \quad x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Proszę znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$ w punkcie $x_0 = e$. Korzystając z faktu, że otrzymana styczna jest przybliżeniem funkcji $f(x)$ w otoczeniu x_0 proszę oszacować wartość $\ln 3$ (zakładamy $e \approx 2.718$). Proszę ocenić jakość (błąd) otrzymanego przybliżenia porównując z dokładną wartością $\ln 3$. W tym zadaniu dozwolone jest korzystanie z kalkulatora/komputera.

5. *(Zadanie dodatkowe).* W mechanice kwantowej ruch cząstek opisuje się za pomocą tzw. funkcji falowej, Ψ. Rozważmy jednowymiarowy (wzdłuż osi x) ruch cząstki w pudle o długości L. Ruch takiej cząstki wewnątrz pudła opisywany jest przez następujące równanie na $\Psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) = E\Psi(x), \tag{1}$$

gdzie E to energia cząstki, $\hbar$ to kreślona stała Plancka, m to masa cząstki, natomiast $\Psi''(x)$ to druga pochodna (pochodna pochodnej) funkcji falowej $\Psi(x)$. Polecenia:

- proszę znaleźć (zgadnąć) rozwiązanie powyższego równania tj. podać funkcję $\Psi(x)$ (*wskazówka*: funkcje trygonometryczne),
- funkcja falowa musi znikać na granicach pudła tj. dla $x = 0$ i $x = L$, innymi słowy $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$; proszę narzucić ten warunek na otrzymane rozwiązanie i znaleźć w ten sposób wzór na energię E cząstki,
- czy każda energia E jest dozwolona? Jaka jest najniższa wartość energii jaką może przyjąć cząstka?
- w interpretacji kopenhaskiej mechaniki kwantowej prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w jakimś punkcie x_0 jest proporcjonalne do $\Psi^2(x_0)$; proszę pokazać, gdzie jest największe prawdopodobieństwo znalezienia cząstki z zadania dla najniższej wartości energii.