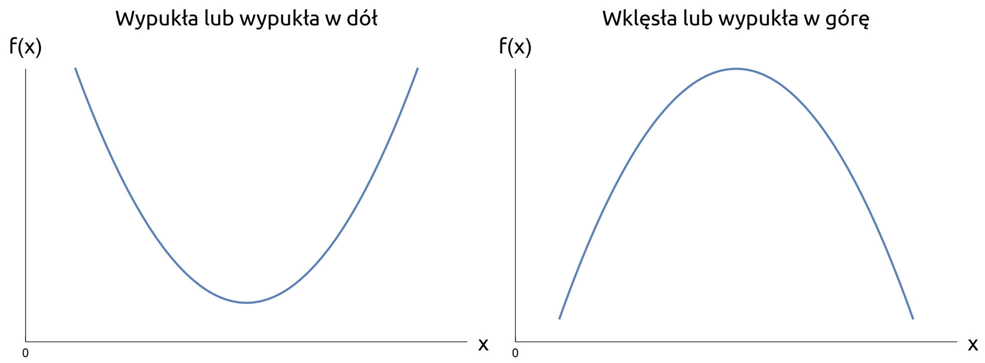
Badanie przebiegu zmienności funkcji

Nomenklatura. Na wykładzie przedstawione zostały ścisłe definicje funkcji “wypukłej w górę” i “wypukłej w dół“. W literaturze popularne jest jednak także inne nazewnictwo – funkcję ”wypukłą w dół“ określa się jako ”wypukłą“, natomiast ”wypukłą w górę“ jako ”wklęsłą“. Warto o tym pamiętać przy korzystaniu z niektórych popularnych książek (np. W. Krysicki, L. Włodarski, *“Analiza matematyczna w zadaniach”*), gdzie stosowane jest to drugie nazewnictwo. Dla ilustracji oba przypadki przedstawione zostały poniżej:



Badanie przebiegu zmienności. Przedstawmy wszystkie etapy badania przebiegu zmienności funkcji $f(x)$, który kończy się zazwyczaj narysowaniem przybliżonego wykresu zadanej funkcji. Kolejność wykonywania opisanych działań jest częściowo arbitralna.

1. Wyznaczenie dziedziny funkcji $f(x)$ (często pomocne jest też oszacowanie położenia miejsc zerowych funkcji);

2. Znalezienie wszystkich asymptot funkcji $f(x)$:

   - asymptota pozioma w $+\infty$ istnieje i wynosi c, jeśli $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ i wartość c jest <u>skończona</u>; podobnie, asymptota pozioma w $-\infty$ istnieje i wynosi c', jeśli $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c'$ i wartość c' jest skończona;
   - asymptota pionowa w punkcie x_0 istnieje, kiedy granica prawo- lub lewostronna $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ wynosi ∞ lub $-\infty$; szczególnie podejrzane są pojedyńcze punkty x_0 wyjęte z dziedziny $f(x)$;
   - istnienie asymptoty ukośnej $ax + b$, $a \neq 0$, przy $x \to \infty$ sprawdzamy obliczając granicę $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; jeśli otrzymana wartość a jest skończona i niezerowa to asymptota ukośna istnieje, a wartość b znajdujemy jako $b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$; analogiczne definicje obowiązują w przypadku asymptoty ukośnej przy $x \to -\infty$;

   Proszę pamiętać, że część asymptot, a nawet wszystkie, mogą nie istnieć dla pewnych funkcji. Dla skrócenia rachunków można się powoływać na fakt, że znalezienie asymptoty poziomej w $+\infty$ wyklucza istnienie ukośnej w $+\infty$ i odwrotnie (tak samo również dla $-\infty$).

3. Znalezienie wszystkich przedziałów z dziedziny, gdzie funkcja jest rosnąca lub malejąca; jeśli w pewnym przedziale $x \in (a, b)$ (a, b mogą też przybierać wartości $+\infty$ lub $-\infty$) pochodna funkcji jest dodatnia, i.e., $f'(x) > 0$, to funkcja jest rosnąca; podobnie, funkcja jest malejąca w przedziałach, gdzie $f'(x) < 0$;

4. Znalezienie wszystkich przedziałów z dziedziny, gdzie funkcja jest wypukła lub wklęsła; jeśli w pewnym przedziale $x \in (a, b)$ mamy $f''(x) > 0$ to funkcja $f(x)$ jest na tym przedziale wypukła, jeśli $f''(x) < 0$ to funkcja $f(x)$ jest na tym przedziale wklęsła;

5. Znalezienie wszystkich punktów x_e, gdzie mogą się znajdować ekstrema funkcji $f(x)$ poprzez rozwiązanie równania $f'(x_e) = 0$;

6. Rozstrzygnięcie, czy znalezione wartości x_e odpowiadają maksimom, minimom, czy punktom przegięcia funkcji $f(x)$:

   - punkt przegięcia jest to punkt, gdzie funkcja zmienia się z wypukłej we wklęsłą (lub odwrotnie) – punkt przegięcia w x_e istnieje kiedy $f''(x_e) = 0$ i kiedy $f''(x)$ zmienia znak w x_e (łatwo to ocenić dysponując wynikami z punktu 4);
   - mamy do czynienia z minimum w x_e jeśli funkcja $f(x)$ w tym punkcie zmienia się z malejącej w rosnącą;
   - mamy do czynienia z maksimum w x_e jeśli funkcja $f(x)$ w tym punkcie zmienia się z rosnącej w malejącą;

   Dwie ostatnie kwestie rozstrzygamy używając wyników z punktu 3.