

## Przykłady metod *ab initio* uwzględniających korelację elektronową

- Funkcje falowe jawnie skorelowane - zależą jawnie od odległości międzyelektronowych

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

- Funkcje falowe w postaci kombinacji liniowej wielu wyznaczników.

Konstrukcja wyznaczników ze spinorbitali obsadzonych w stanie podstawowym i spinorbitali niezajętych (wirtualnych)

Metody:

- CI (metoda oddziaływania konfiguracji): CISD, CISDT, CISDTQ, FCI
  - MCSCF (wielokonfiguracyjna metoda SCF)
  - Coupled Cluster (sprzężonych klastrów): CCSD, CCSDT itd.
- metody rachunku zaburzeń: MP2, MP4

Przykłady funkcji jawnie skorelowanych:

Funkcje Hylleraasa (He, Li):  $\Phi_k = r_1^n r_2^l r_{12}^m e^{-\alpha r_1 - \beta r_2}$

Funkcje Kołosa-Wolniewicza (H<sub>2</sub>):  $\Phi_k = r_{1a}^i r_{2a}^l r_{1b}^{i'} r_{2b}^{l'} r_{12}^n e^{-\alpha r_{1a} - \beta r_{2a} - \alpha' r_{1b} - \beta' r_{2b}}$

Energia wiązania  $D_e$  uzyskana dla H<sub>2</sub> dowolną metodą wariacyjną:

$$D_e \leq D_e^{ex}, \text{ gdzie } D_e^{ex} - \text{dokładna wartość energii wiązania}$$

W 1964 Kołos i Wolniewicz uzyskali dla H<sub>2</sub>  $D_0 = 4,7474 \text{ eV} = 36117,3 \text{ cm}^{-1}$

Uzyskany w 1960 przez Herzberga (Nobel 1971) i Monfilsa z bardzo dokładnych pomiarów spektroskopowych wynik dla H<sub>2</sub>  $D_0 = 36113,6 \pm 0,6 \text{ cm}^{-1}$

Niezgodność z zasadą wariacyjną ?!

1968 - Kołos i Wolniewicz dla H<sub>2</sub>  $D_0 = 36117,4 \text{ cm}^{-1}$

(lepszy wynik teoretyczny większy od mniej dokładnego - zgodnie z zasadą wariacyjną!)

1970 Herzberg  $D_0 = 36118,3 \text{ cm}^{-1}$  (wynik eksperymentalny z r. 1960 był błędny)

**Przykłady metod, w których funkcje falowe mają postać kombinacji  
liniowej wielu wyznaczników:**

$\{\varphi_i\}, i = 1, \dots, m$  - spinorbitale, zajęte w stanie podstawowym od  $i=1$  do  $i = h$  ( $\varepsilon_h = \varepsilon_{HOMO}$ ), niezajęte (wirtualne) dla  $i > h$ . Na przykład, niech  $h=10$

$$\Phi_0(1, 2, \dots, 10) = \frac{1}{\sqrt{10!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(10) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(10) \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \dots & \varphi_3(10) \\ \varphi_4(1) & \varphi_4(2) & \dots & \varphi_4(10) \\ \varphi_5(1) & \varphi_5(2) & \dots & \varphi_5(10) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{10}(1) & \varphi_{10}(2) & \dots & \varphi_{10}(10) \end{vmatrix} \quad (1)$$

Wyznaczniki jednokrotnie wzbudzone ( jeden wirtualny spinorbital zamiast jednego zajętego, np. 11 zamiast 2)

$$\Phi(1, 2, \dots, 10) = \frac{1}{\sqrt{10!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(10) \\ \varphi_{11}(1) & \varphi_{11}(2) & \dots & \varphi_{11}(10) \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \dots & \varphi_3(10) \\ \varphi_4(1) & \varphi_4(2) & \dots & \varphi_4(10) \\ \varphi_5(1) & \varphi_5(2) & \dots & \varphi_5(10) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{10}(1) & \varphi_{10}(2) & \dots & \varphi_{10}(10) \end{vmatrix} \quad (2)$$

Wyznaczniki dwukrotnie wzbudzone ( dwa wirtualne spinorbitale zamiast dwóch zajętych, np. 11 i 12 zamiast 5 i 10)

$$\Phi(1, 2, \dots, 10) = \frac{1}{\sqrt{10!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(10) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(10) \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \dots & \varphi_3(10) \\ \varphi_4(1) & \varphi_4(2) & \dots & \varphi_4(10) \\ \varphi_{11}(1) & \varphi_{11}(2) & \dots & \varphi_{11}(10) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{12}(1) & \varphi_{12}(2) & \dots & \varphi_{12}(10) \end{vmatrix} \quad (3)$$

Wyznaczniki trójrotnie wzbudzone ...

Metody oddziaływania konfiguracji (CI).

CISD - funkcja falowa to kombinacja liniowa wyznacznika  $\Phi_0$  i wyznaczników jednokrotnie (S-single) i dwukrotnie (D-double) wzbudzonych

CIS - nie daje energii korelacji (tw. Brillouina), ale dość dobre energie wzbudzeń elektronowych

CISDT (T-triple, trójrotnie wzbudzone), CISDTQ, (Q-quadruple, czterokrotnie wzbudzone) itd. coraz bardziej dokładne i coraz bardziej czaso-(i koszt)ochłonne

FCI -full configuration interaction (wszystkie wyznaczniki, jakie można zbudować dla  $n$  elektronów stosując  $m$  spinorbitali)

W metodach CI - funkcja falowa to kombinacja liniowa wyznaczników zbudowanych ze spinorbitali, które nie ulegają zmianie w czasie obliczeń. Poszukiwane są współczynniki (liczby), przez które mnożone są wyznaczniki zbudowane z (cały czas takich samych) spinorbitali.

Metoda MCSCF - Metoda wielokonfiguracyjnego SCF

Funkcja falowa to kombinacja liniowa wyznaczników zbudowanych ze spinorbitali, które są reoptymalizowane w czasie obliczeń (zgodnie z zasadą wariacyjną)

Metody teorii sprzężonych klasterów - metody CC (Coupled Cluster)

CCSD, CCSDT, CCSDTQ

Funkcje falowe konstruowane z wyznaczników, ale w inny sposób niż w metodach CI. Metody CC nie są metodami wariacyjnymi.

Energia korelacji obliczona metodami CC w poprawny sposób (liniowo) zależy od liczby atomów np. w kryształce albo polimerze.

**Nie jest tak dla energii korelacji obliczonej metodami CI innymi niż FCI!**

Metody CC są konsystentne rozmiarowo (size-consistent)

$$E_{AB} = E_A + E_B,$$

gdy odległość między A i B staje się tak duża, że wzajemne oddziaływanie A i B jest zaniedbywalne.

## Rachunek zaburzeń

NIE są znane rozwiązania równania:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad (4)$$

Znane są (ściśle) rozwiązania równania:

$$\hat{H}^0\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)} \quad (5)$$

przy czym

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \lambda\hat{H}' \quad (6)$$

$\lambda\hat{H}'$  - zaburzenie musi być małe

$\lambda$  - pomocniczy parametr

### Rachunek zaburzeń Rayleigha-Schrödingera

Jak znaleźć przybliżone rozwiązania równania (4)?

Rozwiniecie nieznanych dokładnych rozwiązań  $\psi_n$  i  $E_n$  w szereg potęg  $\lambda$

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \dots \quad (7)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (8)$$

Podstawienie rozwinięć (7) i (8) do równania (4):

$$\sum_i \lambda^i (\hat{H}^0 + \lambda\hat{H}')\psi_n^{(i)} = \sum_{ij} \lambda^{i+j} E_n^{(j)}\psi_n^{(i)} \quad (9)$$

$\lambda$  - dowolne

Równanie (9) spełnione, jeśli współczynniki przy  $\lambda^i$  równe dla dowolnego  $i$ .

Aby równe były współczynniki przy  $\lambda^0$  musi być:

$$\hat{H}^0\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)} \quad (10)$$

(identyczne z równ. (5), a więc spełnione)

Analogicznie, ze względu na warunki równości współczynników przy  $\lambda^1, \lambda^2, \dots$  muszą być spełnione równania:

$$\hat{H}^0 \psi_n^{(1)} + \hat{H}' \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(1)} + E_n^{(1)} \psi_n^{(0)} \quad (11)$$

$$\hat{H}^0 \psi_n^{(2)} + \hat{H}' \psi_n^{(1)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(2)} + E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} \quad (12)$$

.....

Po pomnożeniu równania sprzężonego do (10) przez  $\psi_n^{(1)}$  i scałkowaniu otrzymuje się:

$$\int \psi_n^{(1)} \hat{H}^0 \psi_n^{(0)*} d\tau = E_n^{(0)} \int \psi_n^{(1)} \psi_n^{(0)*} d\tau \quad (13)$$

Po pomnożeniu równania (11) przez  $\psi_n^{(0)*}$  i scałkowaniu otrzymuje się:

$$\int \psi_n^{(0)*} \hat{H}^0 \psi_n^{(1)} d\tau + \int \psi_n^{(0)*} \hat{H}' \psi_n^{(0)} d\tau = E_n^{(0)} \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(1)} d\tau + E_n^{(1)} \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau \quad (14)$$

Po odjęciu stronami równań (13) i (14) i skorzystaniu z tego, że operator  $\hat{H}^0$  jest hermitowski ( $\int \psi_n^{(1)} \hat{H}^0 \psi_n^{(0)*} d\tau = \int \psi_n^{(0)*} \hat{H}^0 \psi_n^{(1)} d\tau$ ) otrzymuje się:

$$E_n^{(1)} = \int \psi_n^{(0)*} \hat{H}' \psi_n^{(0)} d\tau \quad (15)$$

**Pierwsza poprawka do energii to wartość średnia operatora zaburzenia obliczona dla funkcji falowej układu niezaburzonego.**

Wykorzystując możliwość przedstawienia pierwszej poprawki do funkcji falowej  $\psi_n^{(1)}$  w postaci kombinacji liniowej funkcji falowych dla układu niezaburzonego  $\psi_k^{(0)}$  oraz równania (11) i (10), można otrzymać wyrażenie na pierwszą poprawkę do funkcji:

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{k \neq n} \frac{\int \psi_k^{(0)*} \hat{H}' \psi_n^{(0)} d\tau}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)} \quad (16)$$

Pomnożenie równania sprzężonego do (10) przez  $\psi_n^{(2)}$  i scałkowanie, pomnożenie równania (12) przez  $\psi_n^{(0)*}$  i scałkowanie, a następnie odjęcie stronami otrzymanych równań prowadzi do wyrażenia na drugą poprawkę do energii:

$$E_n^{(2)} = \int \psi_n^{(0)*} \hat{H}' \psi_n^{(1)} d\tau \quad (17)$$

Szczegóły wyprowadzeń (dla chętnych)  $\rightarrow$  W. Kołos, J.Sadlej *Atom i cząsteczka* (Uzupełnienia)

W metodzie MP2 (Møllera-Plesseta) operator dla układu niezaburzonego  $\hat{H}^0$

$$\hat{H}^0 = \sum_{i=1}^N \hat{F}(i) \quad (18)$$

jest sumą operatorów Focka,  $\hat{F}(i)$ , dla wszystkich ( $N$ ) elektronów

$$\hat{H}' = \hat{H} - \hat{H}^0 \quad (19)$$